

*Algunos conceptos  
de probabilidad*

## Variables Aleatorias

Al realizar un experimento aleatorio muchas veces, esperamos que los resultados obtenidos sean gobernados por sus probabilidades. Así las probabilidades forman un modelo de la realidad.



## Regla de Bayes

Si los eventos  $B_1$  y  $B_2$  son eventos mutuamente excluyentes, de tal manera que la unión de ellos conforman todo el espacio muestral  $S$ , y si  $A$  es un subconjunto de  $S$ , tal que  $P(A) > 0$  entonces

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1)P(A | B_1)}{P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)}$$

A un evento expresado numéricamente, se le conoce como **Variable Aleatoria**.

Las variables aleatorias se clasifican de acuerdo al tipo de valores que toman:

Discretas si puede tomar un número finito de valores, o infinito numerable, es decir si los valores que toma se pueden contar.

Continuas si puede tomar sus valores en un intervalo, es decir son valores que se miden.

Cada variable está asociada con un evento del espacio muestral y cada evento tiene asociada una probabilidad de ocurrencia. Al conjunto de estas probabilidades se le llama **Distribución de Probabilidad**.

La Distribución de Probabilidad de una variable aleatoria discreta se puede representar por medio de una gráfica, una tabla o una fórmula.

La variable aleatoria se escriben con **MAYÚSCULAS** ( $X, Y, Z$ ) y el valor que toma con **minúsculas** ( $x, y, z$ )

Para cualquier distribución de probabilidad discreta, se deben cumplir las siguientes **propiedades**:

- Ninguna probabilidad puede ser negativa ni mayor a 1:

$$0 \leq P_X(x_i) \leq 1 \quad \text{para toda } i$$

- La suma de las probabilidades de todos los valores de la variable aleatoria  $X$  debe ser igual a 1:

$$\sum_{i=1}^n P_X(x_i) = 1$$

Notemos que para cualquier función de densidad continua, se deben cumplir las siguientes **propiedades**:

-  $0 \leq f_X(x) \leq 1$

-  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

## Media de una Variable Aleatoria

La Media o Valor Esperado de una variable aleatoria es el promedio ponderado de todos los posibles valores de  $X$ , donde las ponderaciones son las probabilidades asociadas a cada valor de la variable:

$$\mu = E[X] = \sum x P(X = x)$$

para v.a. discretas

$$\mu = E[X] = \int x f_X(x) dx$$

para v.a. continuas



**Algunas propiedades del Valor Esperado son las siguientes:**

- Si  $k$  es una constante,  $E[k] = k$

-  $E[kX] = kE[X]$

- Si  $g_1(X), g_2(X), \dots, g_k(X)$ , son  $k$  funciones de la variable aleatoria  $X$ ,

$$E\left[\sum_{i=1}^k g_i(X)\right] = \sum_{i=1}^k E[g_i(X)]$$

## Varianza de una Variable Aleatoria Discreta

La Varianza de una Variable Aleatoria es el cuadrado de la dispersión promedio de los valores que toma la variable respecto a su media:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X = x_i) - \mu^2$$

**Algunas propiedades de la Varianza son las siguientes:**

-  $Var(X) \geq 0$

- **Si  $k$  es una constante,**  $Var(k) = 0$

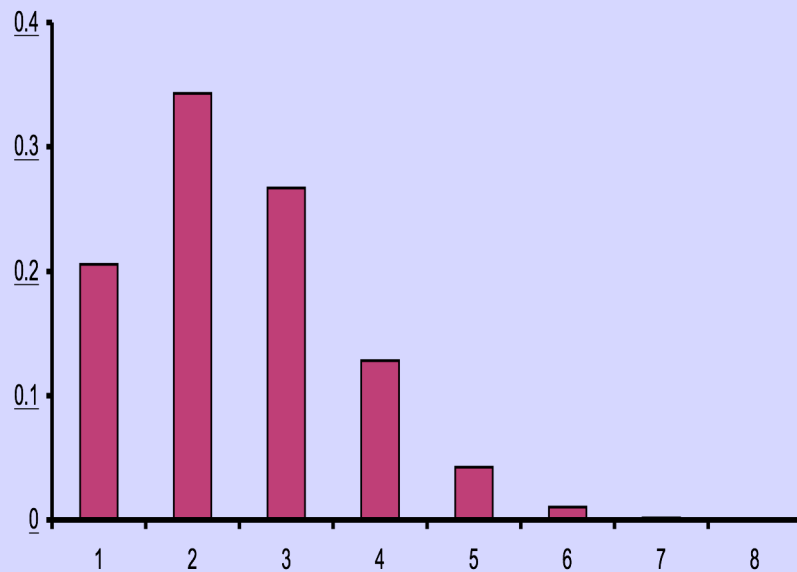
-  $Var(kX) = k^2 Var(X)$

- **Si  $k$  y  $c$  son constantes,**  $Var(kX + c) = k^2 Var(X)$

La **Desviación Estándar** es la raíz positiva de la varianza y nos proporciona una medida de la dispersión promedio respecto a la media

$$\sigma = de(X) = \sqrt{Var(X)}$$

# Distribución Binomial



Uno de dos posibles resultados:

éxito    fracaso

n eventos independientes

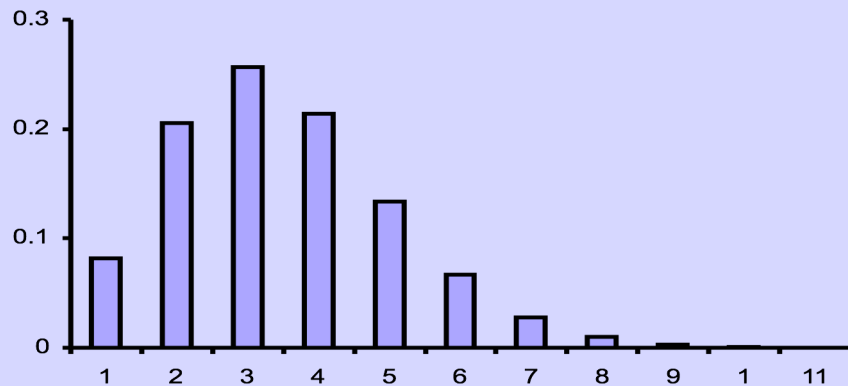
Probabilidad de éxito ( $p$ ) es constante

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x = 0, 1, \dots, n$$

$$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, \dots$$



Eventos discretos en espacios continuos

La ocurrencia de dos eventos en un mismo momento no es posible

La ocurrencia de un evento en un momento es independiente de la ocurrencia de otro evento en cualquier otro momento

El promedio de eventos que ocurren en una unidad de tiempo es  $\lambda$

## Distribución Poisson

# Distribución Normal

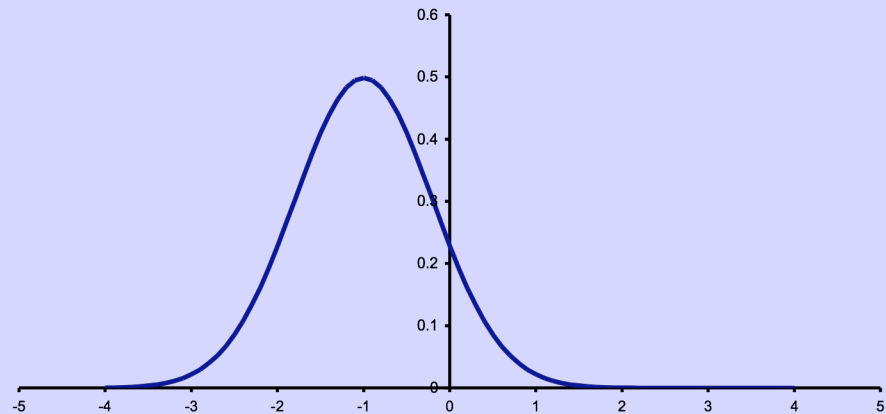
$$N(\mu, \sigma^2)$$

Simétrica respecto a su media

Muchos experimentos se comportan normal

La estadística paramétrica está basada en la normalidad

Muchas propiedades ...



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$\sigma^2 > 0$$

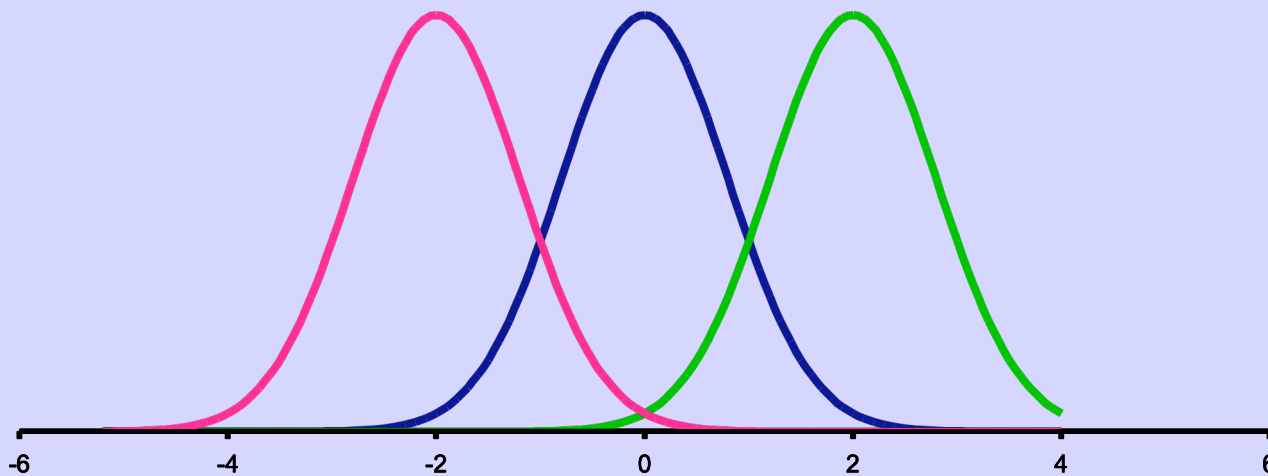
## Algunos ejemplos de la distribución normal

$$\sigma^2 = 0.8$$

$$\mu = -2$$

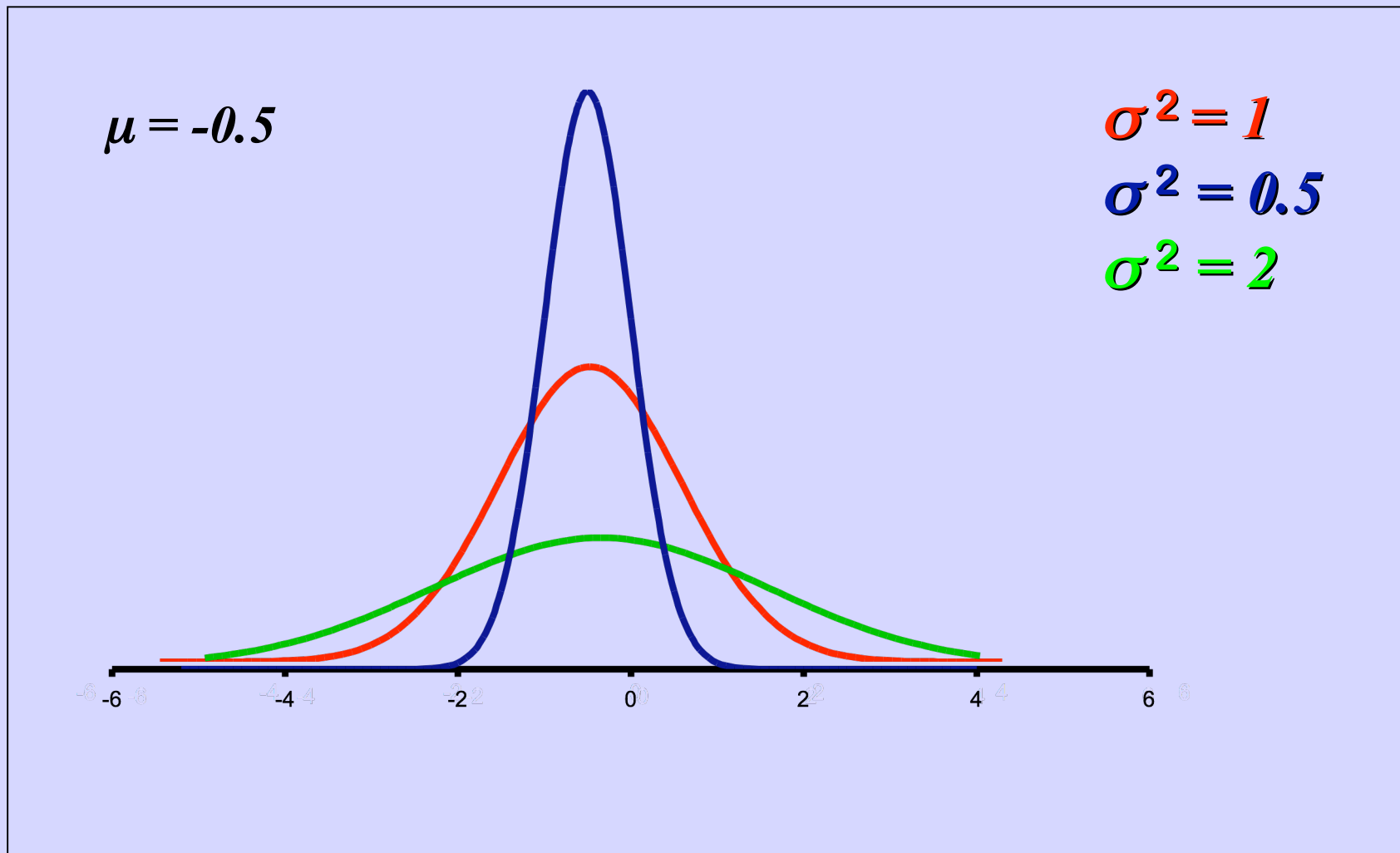
$$\mu = 0$$

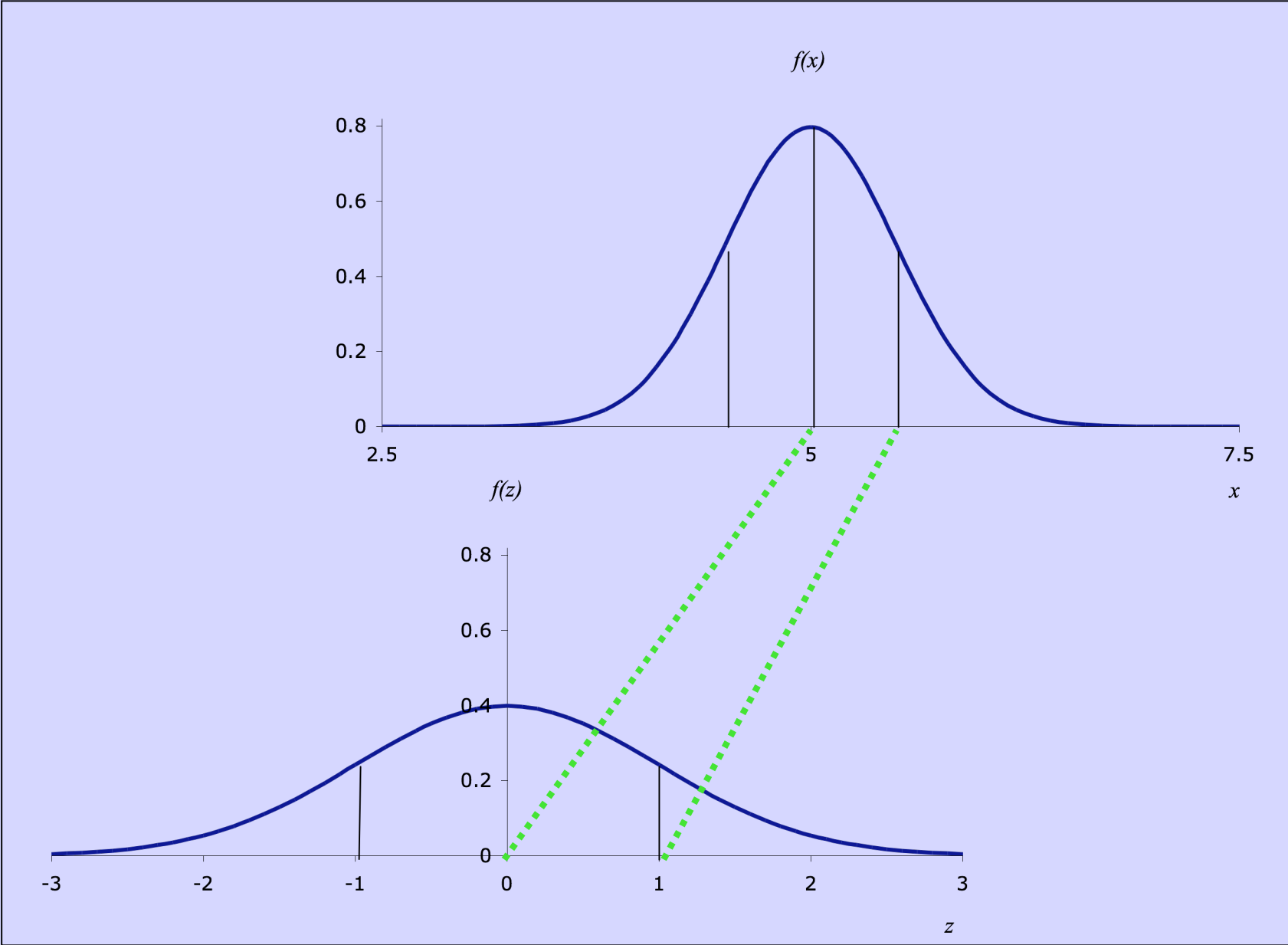
$$\mu = 2$$



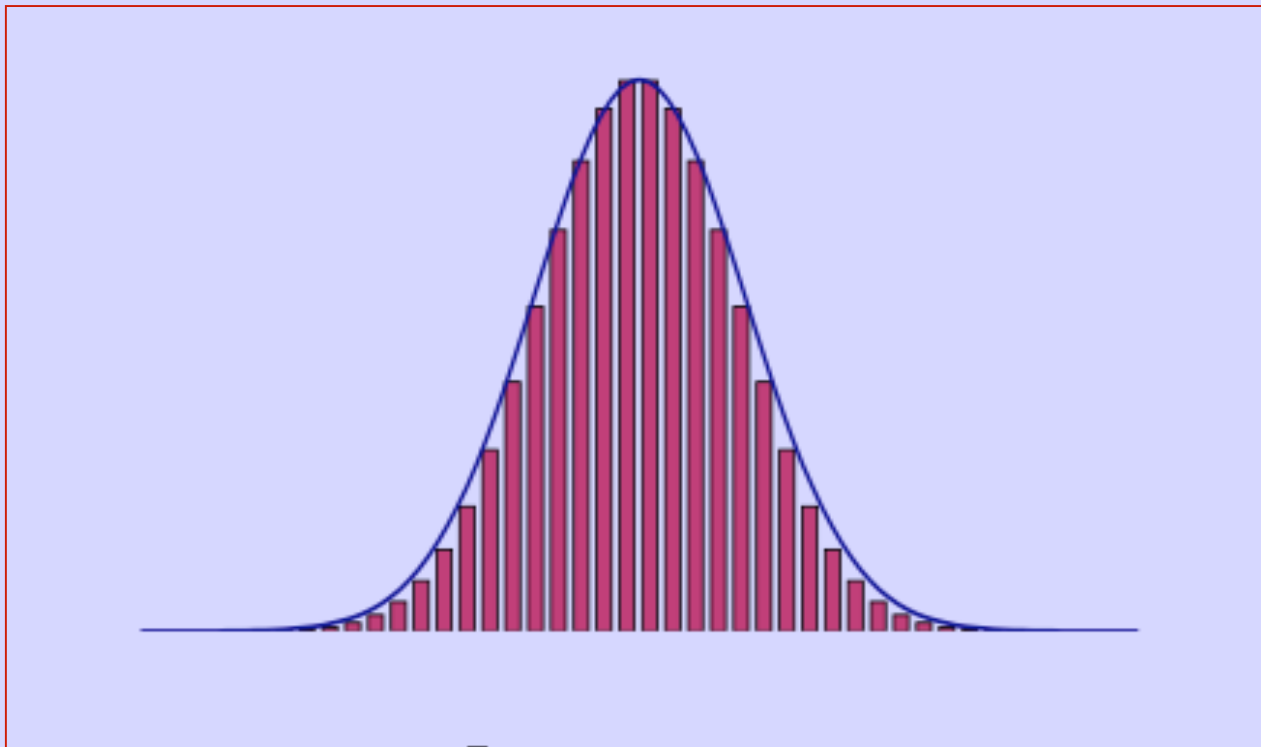


## Más ejemplos de la distribución normal





# Aproximación de la distribución Normal a la Binomial



## Factor de corrección de la continuidad

$$P(X \geq x_o) \rightarrow P(X \geq x_o - 0.5)$$

$$P(X > x_o) \rightarrow P(X \geq x_o + 0.5)$$

$$P(X \leq x_o) \rightarrow P(X \leq x_o + 0.5)$$

$$P(X < x_o) \rightarrow P(X \leq x_o - 0.5)$$

$$P(X = x_o) \rightarrow P(x_o - 0.5 \leq X \leq x_o + 0.5)$$

Una vez corregido se procede a estandarizar, sustituyendo la media por  $np$  y la desviación estándar por  $\sqrt{np(1-p)}$

# Referencias

[http://www.hrc.es/bioest/M\\_docente.html](http://www.hrc.es/bioest/M_docente.html)

Woolf, P., C. Burge, A. Keating & M. Yaffe. *Statistics and Probability Primer for Computational Biologists*. Notas del curso BE 490/ Bio7.91, MIT, 2004. Disponible en [http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Biology/7-91JSpring2004/7A958664-C748-4383-88F9-5547ED40637B/0/prob\\_stat\\_primer.pdf](http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Biology/7-91JSpring2004/7A958664-C748-4383-88F9-5547ED40637B/0/prob_stat_primer.pdf)

Zar, Jerrold H.- *Biostatistical Analysis*.- 4rd ed.- Prentice Hall, Inc

Rosner, B.- *Fundamentals of Biostatistics*. 6<sup>th</sup> Ed. Brooks/Cole Publishing Co., 2006